

Empaquetamientos de discos en rectángulos

Alberto del Valle Robles

Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia

Proyecto ForMate, Hellín, 17 de abril de 2007

Planteamiento del Problema

Vamos a considerar algunas formas razonables de empaquetar discos en un rectángulo o de empaquetar latas en una caja:

Planteamiento del Problema

Vamos a considerar algunas formas razonables de empaquetar discos en un rectángulo o de empaquetar latas en una caja:

- Disposiciones **cuadradas** (o **rectangulares**)
- Disposiciones **triangulares** (o **hexagonales**)
- ...y otras,

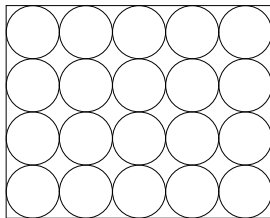
Planteamiento del Problema

Vamos a considerar algunas formas razonables de empaquetar discos en un rectángulo o de empaquetar latas en una caja:

- Disposiciones **cuadradas** (o **rectangulares**)
- Disposiciones **triangulares** (o **hexagonales**)
- ...y otras,

y vamos a analizar **con cuál se aprovecha mejor el espacio** en distintas situaciones.

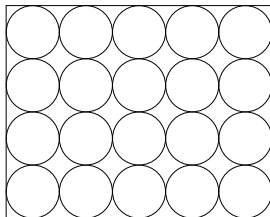
Disposiciones Cuadradas y Triangulares



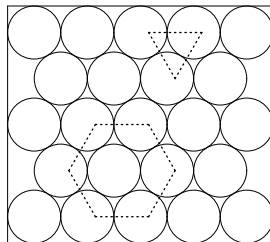
Cuadrada / Rectangular:

todas las filas tienen el mismo número de discos.

Disposiciones Cuadradas y Triangulares

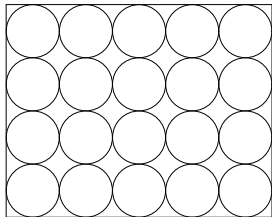


Cuadrada / Rectangular:
todas las filas tienen el
mismo número de discos.

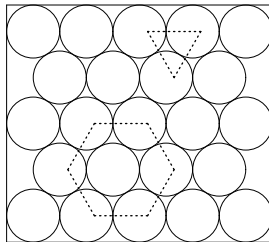


Triangular / Hexagonal:
filas más juntas con un
disco menos en las pares.

Disposiciones Cuadradas y Triangulares



Cuadrada / Rectangular:
todas las filas tienen el
mismo número de discos.



Triangular / Hexagonal:
filas más juntas con un disco menos en las pares.

¿Con cuál se aprovecha mejor el espacio?

Empaquetamientos de discos en rectángulos

Resultados de la Tarea 1

La tabla con las alturas se debe parecer mucho a ésta:

Ancho	Discos	Cuadrada	Triangular	Mejor
6	18	12'0	12'4	Cuadrada
6	23	16'0	15'9	Triangular
8	28	14'0	14'1	Cuadrada
8	32	16'0	15'9	Triangular

Resultados de la Tarea 1

La tabla con las alturas se debe parecer mucho a ésta:

Ancho	Discos	Cuadrada	Triangular	Mejor
6	18	12'0	12'4	Cuadrada
6	23	16'0	15'9	Triangular
8	28	14'0	14'1	Cuadrada
8	32	16'0	15'9	Triangular

- A veces es mejor la disposición **C** y otras es mejor la **T**.

Resultados de la Tarea 1

La tabla con las alturas se debe parecer mucho a ésta:

Ancho	Discos	Cuadrada	Triangular	Mejor
6	18	12'0	12'4	Cuadrada
6	23	16'0	15'9	Triangular
8	28	14'0	14'1	Cuadrada
8	32	16'0	15'9	Triangular

- A veces es mejor la disposición **C** y otras es mejor la **T**.
- ¿Cuándo es mejor una y cuándo otra?

Resultados de la Tarea 1

La tabla con las alturas se debe parecer mucho a ésta:

Ancho	Discos	Cuadrada	Triangular	Mejor
6	18	12'0	12'4	Cuadrada
6	23	16'0	15'9	Triangular
8	28	14'0	14'1	Cuadrada
8	32	16'0	15'9	Triangular

- A veces es mejor la disposición **C** y otras es mejor la **T**.
- ¿Cuándo es mejor una y cuándo otra?
¿Habría que hacer siempre la prueba y medir?

Resultados de la Tarea 1

La tabla con las alturas se debe parecer mucho a ésta:

Ancho	Discos	Cuadrada	Triangular	Mejor
6	18	12'0	12'4	Cuadrada
6	23	16'0	15'9	Triangular
8	28	14'0	14'1	Cuadrada
8	32	16'0	15'9	Triangular

- A veces es mejor la disposición **C** y otras es mejor la **T**.
- ¿Cuándo es mejor una y cuándo otra?
 - ¿Habría que hacer siempre la prueba y medir?
 - ¿Incluso para un número muy grande de discos?

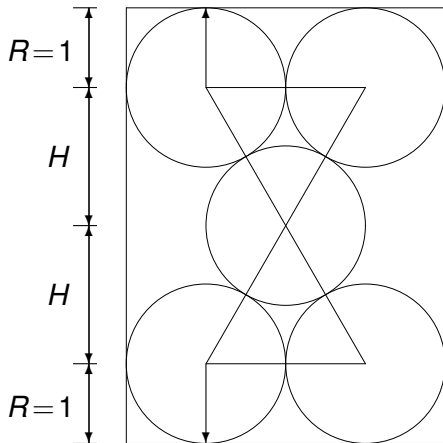
Resultados de la Tarea 1

La tabla con las alturas se debe parecer mucho a ésta:

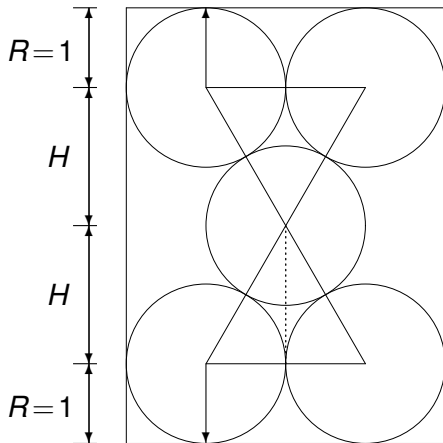
Ancho	Discos	Cuadrada	Triangular	Mejor
6	18	12'0	12'4	Cuadrada
6	23	16'0	15'9	Triangular
8	28	14'0	14'1	Cuadrada
8	32	16'0	15'9	Triangular

- A veces es mejor la disposición **C** y otras es mejor la **T**.
- ¿Cuándo es mejor una y cuándo otra?
 - ¿Habrá que hacer siempre la prueba y medir?
 - ¿Incluso para un número muy grande de discos?
 - ¿No será mejor “modelizar”, buscar una fórmula?

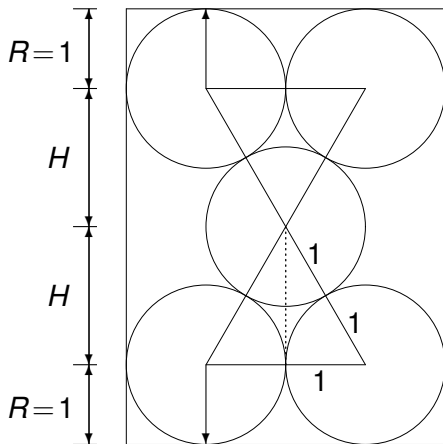
La fórmula clave



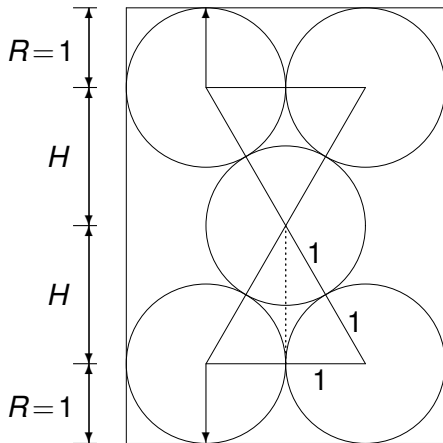
La fórmula clave



La fórmula clave

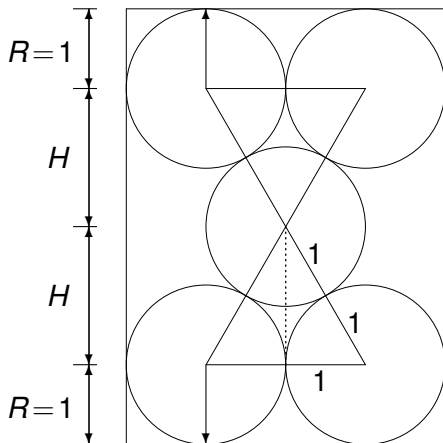


La fórmula clave



$$2^2 = 1^2 + H^2 \Rightarrow$$
$$H = \sqrt{3} = 1'732 \dots$$

La fórmula clave



$$2^2 = 1^2 + H^2 \Rightarrow$$
$$H = \sqrt{3} = 1'732 \dots$$

altura para F filas =

$$2 + 1'732 (F - 1) =$$

$$\boxed{0'268 + 1'732 F}$$

La fórmula comparada con los datos de la Tarea 1

Para las disposiciones **triangulares** de la Tarea 1, comparemos los datos que obtuvimos con los que nos da la fórmula:

Ancho	Discos	Filas	Tarea 1	Fórmula
6	18	7	12'4	12'392
8	28	8	14'1	14'124
6/8	23/32	9	15'9	15'856

Aplicando la fórmula

Si con una anchura 8 (4 discos por fila) queremos empaquetar 56 discos, ¿qué disposición será mejor, **C** ó **T**?

Aplicando la fórmula

Si con una anchura 8 (4 discos por fila) queremos empaquetar 56 discos, ¿qué disposición será mejor, **C** ó **T**?

Como no tenemos suficiente material para hacer la prueba manipulando, tendremos que hacer cuentas:

Disposición **C**uadrada:

- número de filas =

Aplicando la fórmula

Si con una anchura 8 (4 discos por fila) queremos empaquetar 56 discos, ¿qué disposición será mejor, **C** ó **T**?

Como no tenemos suficiente material para hacer la prueba manipulando, tendremos que hacer cuentas:

Disposición **C**uadrada:

- número de filas = $56/4 = 14$
- altura total =

Aplicando la fórmula

Si con una anchura 8 (4 discos por fila) queremos empaquetar 56 discos, ¿qué disposición será mejor, **C** ó **T**?

Como no tenemos suficiente material para hacer la prueba manipulando, tendremos que hacer cuentas:

Disposición **C**uadrada:

- número de filas = $56/4 = 14$
- altura total = **28**

Aplicando la fórmula

Si con una anchura 8 (4 discos por fila) queremos empaquetar 56 discos, ¿qué disposición será mejor, **C** ó **T**?

Como no tenemos suficiente material para hacer la prueba manipulando, tendremos que hacer cuentas:

Disposición **C**uadrada:

- número de filas = $56/4 = 14$
- altura total = **28**

Disposición **T**riangular:

- número de filas =

Aplicando la fórmula

Si con una anchura 8 (4 discos por fila) queremos empaquetar 56 discos, ¿qué disposición será mejor, **C** ó **T**?

Como no tenemos suficiente material para hacer la prueba manipulando, tendremos que hacer cuentas:

Disposición **C**uadrada:

- número de filas = $56/4 = 14$
- altura total = **28**

Disposición **T**riangular:

- número de filas = $(56/7) \times 2 = 16$
- altura total =

Aplicando la fórmula

Si con una anchura 8 (4 discos por fila) queremos empaquetar 56 discos, ¿qué disposición será mejor, **C** ó **T**?

Como no tenemos suficiente material para hacer la prueba manipulando, tendremos que hacer cuentas:

Disposición **C**uadrada:

- número de filas = $56/4 = 14$
- altura total = **28**

Disposición **T**riangular:

- número de filas = $(56/7) \times 2 = 16$
- altura total = $0'268 + 1'732 \times 16 = \mathbf{27'980}$.

Es decir, es mejor la disposición **T** por un margen inapreciable.

La notación C2, T3, T2'5, ...

Ahora suponemos que tenemos un **número fijo de discos** y analizamos de cuántas formas podemos empaquetarlos en un rectángulo, admitiendo disposiciones cuadradas y triangulares y sin que sobren huecos innecesarios.

La notación C_2 , T_3 , $T_2'5$, ...

Ahora suponemos que tenemos un **número fijo de discos** y analizamos de cuántas formas podemos empaquetarlos en un rectángulo, admitiendo disposiciones cuadradas y triangulares y sin que sobren huecos innecesarios.

Usaremos una notación especial; llamaremos por ejemplo:

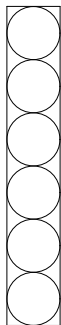
C_2 a la disposiciones cuadradas en un rectángulo cuya anchura es la de 2 discos,

T_3 a la disposiciones triangulares en un rectángulo cuya anchura es la de 3 discos,

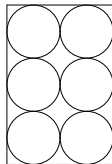
$T_2'5$ a las disposiciones triangulares en un rectángulo cuya anchura es la de 2 discos y medio.

Disposiciones de 6 discos

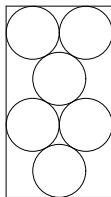
Por ejemplo, para 6 discos tenemos las posibilidades:



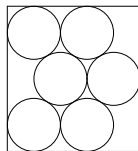
C1



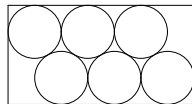
C2



T2



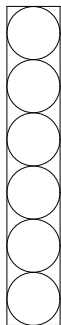
T2'5



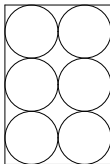
T3'5

Disposiciones de 6 discos

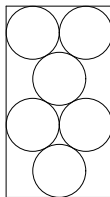
Por ejemplo, para 6 discos tenemos las posibilidades:



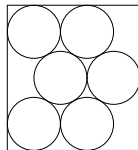
C1



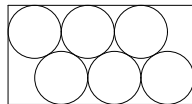
C2



T2



T2'5



T3'5

C3 y C6 serían las mismas que C2 y C1, respectivamente.

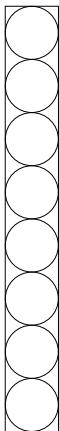
T1'5 no es triangular, mientras que T3 y T4 dejarían huecos.

Tarea 2-A: Disposiciones de 8 discos

Dibuja todas las disposiciones de 8 discos:

Tarea 2-A: Disposiciones de 8 discos

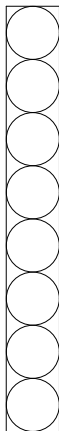
Dibuja todas las disposiciones de 8 discos:



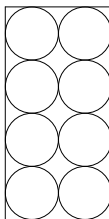
C1

Tarea 2-A: Disposiciones de 8 discos

Dibuja todas las disposiciones de 8 discos:



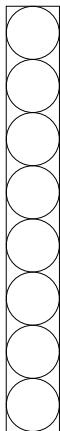
C1



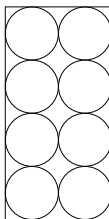
C2

Tarea 2-A: Disposiciones de 8 discos

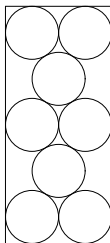
Dibuja todas las disposiciones de 8 discos:



C1



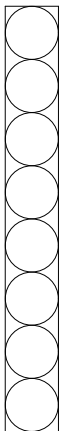
C2



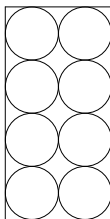
T2

Tarea 2-A: Disposiciones de 8 discos

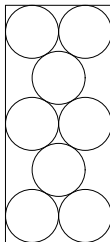
Dibuja todas las disposiciones de 8 discos:



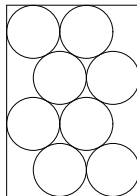
C1



C2



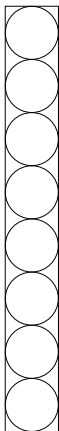
T2



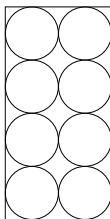
T2'5

Tarea 2-A: Disposiciones de 8 discos

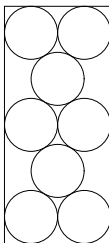
Dibuja todas las disposiciones de 8 discos:



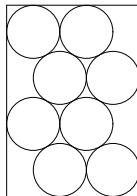
C1



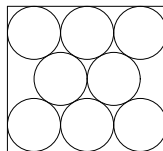
C2



T2



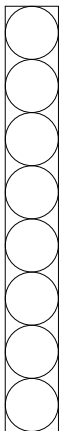
T2'5



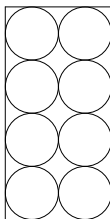
T3

Tarea 2-A: Disposiciones de 8 discos

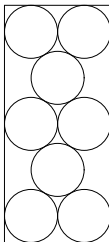
Dibuja todas las disposiciones de 8 discos:



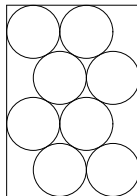
C1



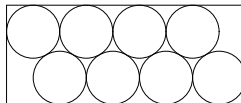
C2



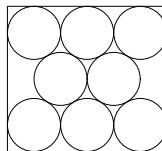
T2



T2'5



T4'5



T3

Tarea 2-B: Áreas y Perímetros

Encuentra las disposiciones de 8 discos con menor área y con menor perímetro, usando la siguiente tabla:

Disp.	ancho	alto	área	Perím.
C1				
C2				
T2				
T2'5				
T3				
T4'5				

Tarea 2-B: Áreas y Perímetros

Encuentra las disposiciones de 8 discos con menor área y con menor perímetro, usando la siguiente tabla:

Disp.	ancho	alto	área	Perím.
C1	2			
C2	4			
T2	4			
T2'5	5			
T3	6			
T4'5	9			

Tarea 2-B: Áreas y Perímetros

Encuentra las disposiciones de 8 discos con menor área y con menor perímetro, usando la siguiente tabla:

Disp.	ancho	alto	área	Perím.
C1	2	16		
C2	4	8		
T2	4			
T2'5	5			
T3	6			
T4'5	9			

Tarea 2-B: Áreas y Perímetros

Encuentra las disposiciones de 8 discos con menor área y con menor perímetro, usando la siguiente tabla:

Disp.	ancho	alto	área	Perím.
C1	2	16	32	
C2	4	8	32	
T2	4			
T2'5	5			
T3	6			
T4'5	9			

Tarea 2-B: Áreas y Perímetros

Encuentra las disposiciones de 8 discos con menor área y con menor perímetro, usando la siguiente tabla:

Disp.	ancho	alto	área	Perím.
C1	2	16	32	36
C2	4	8	32	24
T2	4			
T2'5	5			
T3	6			
T4'5	9			

Tarea 2-B: Áreas y Perímetros

Encuentra las disposiciones de 8 discos con menor área y con menor perímetro, usando la siguiente tabla:

Disp.	ancho	alto	área	Perím.
C1	2	16	32	36
C2	4	8	32	24
T2	4	8'928	—	—
T2'5	5	7'196	35'980	24'392
T3	6	5'464	32'784	22'928
T4'5	9	3'732	33'588	25'464

Tarea 2-B: Áreas y Perímetros

Encuentra las disposiciones de 8 discos con menor área y con menor perímetro, usando la siguiente tabla:

Disp.	ancho	alto	área	Perím.
C1	2	16	32	36
C2	4	8	32	24
T2	4	8'928	—	—
T2'5	5	7'196	35'980	24'392
T3	6	5'464	32'784	22'928
T4'5	9	3'732	33'588	25'464

Tarea 2-C: Áreas Superficiales

Imaginemos ahora que nuestros discos son en realidad latas de conserva cilíndricas de radio 1 y altura h , y que queremos empaquetarlas de 8 en 8 en cajas gastando la menor cantidad posible de cartón.

La superficie del cartón para una disposición con área A y perímetro P será:

Tarea 2-C: Áreas Superficiales

Imaginemos ahora que nuestros discos son en realidad latas de conserva cilíndricas de radio 1 y altura h , y que queremos empaquetarlas de 8 en 8 en cajas gastando la menor cantidad posible de cartón.

La superficie del cartón para una disposición con área A y perímetro P será: $2A + h \cdot P$.

Amplíemos la tabla anterior para los casos $h = 1$ y $h = 2$:

Tarea 2-C: Áreas Superficiales

Así pues, si la altura de las latas es $h = 1$ se gasta menos cartón con la distribución C2, mientras que si la altura es $h = 2$ se gasta menos con T3.

Lógicamente, como T3 tiene el menor perímetro, es tanto mejor cuanto más influye el perímetro en la cantidad $2A + h \cdot P$, o sea es tanto mejor cuanto mayor es h .

¿Para qué altura h se gasta lo mismo con C2 que con T3?

Tarea 2-C: Áreas Superficiales

Así pues, si la altura de las latas es $h = 1$ se gasta menos cartón con la distribución C2, mientras que si la altura es $h = 2$ se gasta menos con T3.

Lógicamente, como T3 tiene el menor perímetro, es tanto mejor cuanto más influye el perímetro en la cantidad $2A + h \cdot P$, o sea es tanto mejor cuanto mayor es h .

¿Para qué altura h se gasta lo mismo con C2 que con T3?

$$64 + 24h = 65'568 + 22'928 h \Rightarrow$$

$$1'072 h = 1'568 \Rightarrow h \approx 1'463$$

¿Y si podemos apilar los botes?

Si podemos apilar los botes podemos pensar en poner 4 formando un cuadrado y otros 4 arriba.

¿Cuánto cartón se gasta entonces para una altura $h = 2$?

¿Y si podemos apilar los botes?

Si podemos apilar los botes podemos pensar en poner 4 formando un cuadrado y otros 4 arriba.

¿Cuánto cartón se gasta entonces para una altura $h = 2$?

Área de la base $4 \times 4 = 16$, por 2 bases (arriba y abajo) = 32.

Área lateral = Perímetro por $2h = 16 \times 4 = 64$.

Área total **96** (frente a los 112 anteriores).

¿Y si podemos apilar los botes?

Si podemos apilar los botes podemos pensar en poner 4 formando un cuadrado y otros 4 arriba.

¿Cuánto cartón se gasta entonces para una altura $h = 2$?

Área de la base $4 \times 4 = 16$, por 2 bases (arriba y abajo) = 32.

Área lateral = Perímetro por $2h = 16 \times 4 = 64$.

Área total **96** (frente a los 112 anteriores).

Para $h = 4$ se obtiene en cada caso la siguiente área lateral:

- Apilando, $32 + 16 \times 8 = 160$.
- Con C2, $2A + 4P = 64 + 48 = 160$.
- Con T3, $2A + 4P = 65'568 + 91'712 = \mathbf{157'280}$.

Conclusiones

A menudo podemos estudiar una situación **manipulándola**, como al principio, pero si hay que repetirla muchas veces o los datos son poco manejables entonces es mejor hacer un **modelo matemático**, encontrar las **fórmulas** que la gobiernan.

Las situaciones prácticas en las que esta modelización puede ayudar son variadas y cada una requiere un modelo ad-hoc:

- Tengo que meter 23 barriles en un camión y quiero dejar el mayor espacio libre al final para cargar más cosas.
- Tengo que transportar 96 barriles en un camión y quiero echar el menor número de viajes.
- Tengo que empaquetar latas de 8 en 8, y puedo (o no puedo) apilarlas.

La **densidad** de un empaquetamiento es la proporción de la superficie que queda cubierta por los discos.

En una **disposición cuadrada** con discos de radio 1 cada losa cuadrada de superficie 4 queda cubierta por un disco de radio π , por lo que la porción del suelo cubierta es de $\pi/4 = 78'54\%$.

